

INESTABILIDADES EN UN LECHO GRANULAR MÓVIL: ANÁLISIS MATEMÁTICO DE FORMAS DE FONDO

Yarko Niño¹

RESUMEN: Se presenta un análisis teórico de las condiciones para las cuales se generan ondas sedimentarias en un flujo turbulento sobre lecho móvil. Se revisa una metodología general para el análisis de estabilidad lineal de las ecuaciones que gobiernan el flujo y el movimiento del sedimento del lecho. Esta metodología se aplica al análisis de la formación de barras, y de dunas y antidunas. El análisis predice que la formación de barras depende fundamentalmente de la razón entre el ancho del canal y la altura de escurrimiento. A menor altura de escurrimiento el sistema selecciona estructuras más complejas, formándose sucesivamente barras alternadas, dobles, triples, etc., las cuales poseen longitudes de onda respectivamente más pequeñas. En todos estos casos las barras migran hacia aguas abajo. Del análisis también se concluye que la formación de dunas y antidunas depende fundamentalmente del número de Froude del flujo. Las dunas se forman en condiciones de flujo subcrítico y siempre migran hacia aguas abajo. Las antidunas se forman en condiciones de flujo supercrítico y pueden migrar tanto hacia aguas arriba como hacia aguas abajo. En las cercanías del flujo crítico el análisis predice la desaparición de formas de fondo.

ABSTRACT: A theoretical analysis of the conditions for bedform development in a turbulent open channel flow over a movable bed is presented. A general methodology for the linear stability analysis of the equations governing flow and sediment transport is revised. This methodology is applied to the analysis of bar and dune/antidune formation. The analysis predicts that bar development is mainly controlled by the channel width to height of flow ratio. As this ratio increases, the structures selected are increasingly more complex, starting with alternate bars and followed by double bars, triple bars, etc., which have decreasing values of the wavelength. In all these cases bars migrate in the downstream direction. The analysis also shows that the dune/antidune formation depends mainly on the Froude number of the flow. Dunes are formed in subcritical flows, and always migrate in the downstream direction. Antidunes emerge in supercritical flows and can migrate in both the upstream and downstream directions. In the vicinity of the critical flow the stability analysis predicts a flat bed with no bedforms.

INTRODUCCIÓN

Se sabe que el flujo de agua sobre sedimento no cohesivo conduce a la formación de una gran variedad de ondas sedimentarias, genéricamente denominadas formas de fondo. Estas formas de fondo corresponden a estructuras de geometría bien definida que presentan una periodicidad espacial característica. La interacción entre el flujo y las ondas sedimentarias determina la resistencia hidráulica y también en gran medida la tasa de transporte de sedimentos (Engelund y Fredsøe, 1982). Más aún, las formas de fondo pueden afectar la morfología de los canales aluviales. Por ejemplo, la presencia de las formas de fondo denominadas barras alternadas ha sido vinculada con el desarrollo incipiente de meandros (García y Niño, 1993). Sin duda estos aspectos demuestran que el estudio de las formas de fondo y su interacción

con un flujo turbulento tiene gran importancia desde el punto de vista de la ingeniería. Por otro lado, dado que la simetría interna que presentan las formas de fondo manifiesta una simplicidad que por el contrario emerge de interacciones en un sistema dinámico complejo, el estudio de estas estructuras es también materia de gran interés científico.

Las formas de fondo cubren un espectro bastante amplio de escalas espaciales, desde las más pequeñas, del orden del tamaño de los granos que forman el lecho móvil, hasta las más grandes, del orden del tamaño del canal que las contiene. Considérese un experimento imaginario conducido en un canal rectangular de laboratorio, de ancho constante y lecho móvil formado por una arena relativamente fina y uniforme. Apenas la condición de movimiento incipiente de los granos de fondo

¹Departamento de Ingeniería Civil. División de Recursos Hídricos y Medio Ambiente, Universidad de Chile, Casilla 228/3, Santiago, Chile. e-mail: ynino@tamarugo.cec.uchile.cl

Artículo publicado en *Ingeniería del Agua*. Vol.3 Num.4 (diciembre 1996), páginas 25-36, recibido el **20 de junio de 1996** y aceptado para su publicación el **18 de septiembre de 1996**. Pueden ser remitidas discusiones sobre el artículo hasta seis meses después de la publicación del mismo. En el caso de ser aceptadas, las discusiones serán publicadas conjuntamente con la respuesta de los autores en el primer número de la revista que aparezca una vez transcurrido el plazo indicado.

es superada, puede esperarse observar en el lecho del canal la formación de pequeñas ondas, denominadas rizos, cuya altura es del orden de unos cuantos diámetros del sedimento del lecho y cuya longitud de onda es proporcional al tamaño de dicho sedimento e independiente de la altura del flujo. La formación de los rizos está relacionada con efectos viscosos por lo tanto ellos ocurren sólo cuando la subcapa viscosa del flujo no ha sido totalmente destruida por la presencia de los granos del lecho.

En condiciones de flujo subcrítico, transporte de fondo generalizado, y si la altura de escurrimiento es suficientemente grande, sobre el lecho del canal se forman dunas, cuya altura y longitud de onda son proporcionales a la altura del flujo. Bajo ciertas condiciones, las dunas pueden coexistir con los rizos, los cuales tienden a formarse sobre las primeras en su cara de aguas arriba. A números de Froude cercanos a la unidad, el lecho del canal se vuelve plano, y a valores todavía más altos de este parámetro puede esperarse la formación de antidunas, cuyo perfil longitudinal, a diferencia del de los rizos y las dunas que presentan en la cara de aguas abajo una pendiente mucho más abrupta

principalmente en la zona cercana a la pared, las cuales al igual que los frentes se alternan a uno u otro lado del canal (ver Figura 1). La longitud de onda de las barras alternadas es del orden de unos cuantos anchos del canal y la escala vertical de ellas es del orden de la altura de escurrimiento. Para alturas de escurrimiento aún más bajas que aquellas para las cuales se desarrollan las barras alternadas en el canal, puede esperarse la formación de barras múltiples, similares a estas últimas, pero que presentan dos o más frentes en una misma sección transversal que se alternan asimétricamente a lo largo del canal, y las cuales han sido consideradas como predecesoras de la formación de canales trenzados.

Uno de los aspectos de mayor interés respecto del estudio de las formas de fondo consiste en poder predecir las condiciones hidráulicas y sedimentológicas conducentes a la formación de los distintos tipos de ondas. Típicamente este problema se ha abordado empíricamente, determinándose dichas condiciones tanto a partir de experimentos como de observaciones de terreno (e.g., Jaeggi, 1984, en el caso de barras alternadas; Vanoni, 1974, en el caso de rizos, dunas y

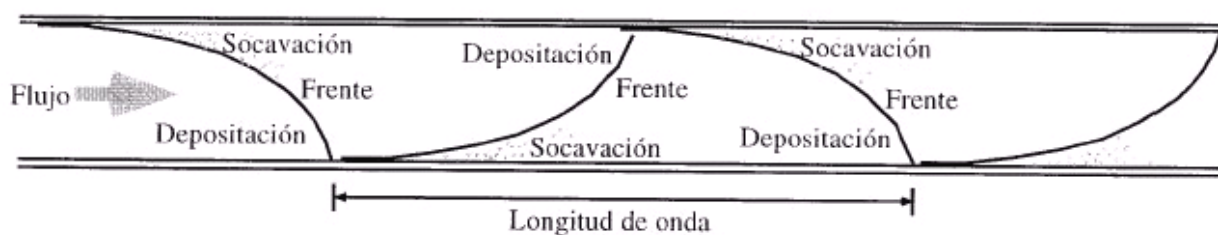


Figura. 1 Esquema mostrando un tren de barras alternadas, consistente en una serie de frentes diagonales separando zonas de socavación y deposición que se alternan a uno y otro lado del canal. El tren de barras alternadas siempre se desplaza hacia aguas abajo.

que la de aguas arriba y cercana al ángulo de reposo sumergido de los granos, es más semejante a una onda sinusoidal. Las antidunas, también a diferencia de los rizos y dunas que siempre migran hacia aguas abajo, pueden migrar tanto hacia aguas arriba como en el sentido del escurrimiento.

Si la altura de escurrimiento en el canal es inferior a aquella para la cual se formaron las dunas y todavía persisten las condiciones de transporte de fondo generalizado, dichas dunas pueden ser reemplazadas por (o incluso pueden coexistir) con barras alternadas. Estas estructuras consisten en una secuencia de frentes de onda que se orientan diagonalmente con respecto al flujo, alternándose asimétricamente, y que presentan zonas de erosión en la cara de aguas abajo de los frentes,

antidunas). No obstante, análisis teóricos del problema también han sido bastante exitosos (e.g., Fredsøe, 1974, en el caso de dunas y antidunas; Kuroki y Kishi, 1985, y Blondeaux y Seminara, 1985, en el caso de las barras alternadas).

El presente trabajo pretende mostrar como la modelación matemática del flujo turbulento en canales y de los procesos asociados al transporte de sedimento puede utilizarse para avanzar el entendimiento de los procesos físicos que conducen a la formación de ondas sedimentarias. En particular, se explicará brevemente el tipo de análisis matemático que se utiliza para estudiar las inestabilidades del lecho móvil, y dicho análisis se aplicará al caso de la formación de barras (alternadas y múltiples) y de dunas y antidunas.

FORMULACIÓN MATEMÁTICA GENERAL

Un sistema físico puede ser modelado matemáticamente por un sistema de ecuaciones, el cual pretende representar los aspectos principales del sistema dinámico original. En general, el comportamiento del sistema depende de una serie de parámetros, los cuales son denominados parámetros de control. El sentido común tiende a indicar que una variación pequeña y gradual del valor de un parámetro de control dado conduce a cambios pequeños y graduales en el comportamiento del sistema. Este principio fundamental está relacionado con lo que técnicamente se conoce como estabilidad estructural (Casti, 1994). Por ejemplo el número de Reynolds, Re , es un parámetro de control en las ecuaciones de Navier-Stokes. A valores de Re suficientemente bajos, en condiciones de flujo laminar, variaciones pequeñas y graduales de este parámetro producen pequeñas variaciones de las propiedades del flujo, sin embargo las características generales del flujo laminar no se ven alteradas por dicha variación. No obstante, no todos los sistemas dinámicos son estructuralmente estables. Es frecuente encontrar sistemas en los que un pequeño cambio en un parámetro de control, dentro de un cierto rango, puede conducir a un gran cambio en el comportamiento general del sistema. Por ejemplo para ciertos valores de Re , un pequeño aumento en el valor de este parámetro conduce a un cambio completo del comportamiento del sistema, y es así como un flujo laminar deja de ser estructuralmente estable y comienza una serie de transiciones que eventualmente lo convierten en un flujo turbulento. La pérdida de estabilidad estructural del sistema para un valor dado de un parámetro de control se conoce también como bifurcación del sistema (Jackson, 1991).

En el caso de un flujo sobre lecho móvil, para ciertos valores de los parámetros de control, el sistema tiene un estado de equilibrio, o estado base, el cual se caracteriza por un lecho plano. Para otros valores de los parámetros de control el estado base (lecho plano) pierde estabilidad estructural y el sistema alcanza otro estado de equilibrio (se bifurca), el cual se caracteriza por un lecho ondulado, o equivalentemente, un lecho cubierto por ondas sedimentarias.

Una técnica utilizada para estudiar la estabilidad estructural del estado base de un sistema dinámico modelado por un sistema de ecuaciones consiste en efectuar una linearización de dichas ecuaciones alrededor del estado base, e introducir perturbaciones de pequeña amplitud en el sistema. Si para un grupo de valores de los parámetros de control dado la solución del sistema linearizado indica que la amplitud de las perturbaciones tiende a decaer en el tiempo, entonces el estado base es estable para dichos valores de los parámetros de control. Si por el contrario la solución

demuestra que la amplitud de las perturbaciones tiende a aumentar en el tiempo, entonces el estado base es inestable para el grupo de valores de los parámetros de control considerados y puede esperarse en este caso una bifurcación del sistema desde el estado base hacia un nuevo estado de equilibrio (Drazin y Reid, 1981).

Debido a la linearización del sistema de ecuaciones original, el análisis descrito anteriormente sólo puede indicar si el estado base es estable o no, y no permite determinar el desarrollo temporal de las perturbaciones a largo plazo. Es posible demostrar que el análisis lineal generalmente predice un decaimiento o crecimiento temporal de la amplitud de las perturbaciones el cual es de carácter exponencial. En el caso que el estado base sea inestable, el crecimiento exponencial de la amplitud de las perturbaciones predicho por el análisis lineal es válido sólo mientras dicha amplitud es suficientemente pequeña como para que la linearización del sistema sea válida. A amplitudes mayores, efectos no-lineales usualmente tienden a frenar el crecimiento de las perturbaciones (lo cual desde el punto de vista físico generalmente está asociado a algún mecanismo de disipación de energía) eventualmente alcanzándose un nuevo estado de equilibrio (Stuart, 1958). Este proceso se conoce como saturación no-lineal (Drazin y Reid, 1981).

Lo anterior indica que las formas de fondo en un flujo permanente sobre un lecho móvil comienzan a desarrollarse bajo condiciones para las cuales el lecho es inestable, de modo que inicialmente (y para tiempos pequeños) su amplitud crece exponencialmente, sin embargo en el largo plazo las ondas sedimentarias tienden a alcanzar una amplitud de equilibrio, la cual no cambia en el tiempo.

Si el sistema de ecuaciones diferenciales considerado puede ser escrito como:

$$f(y; c) = 0 \quad (1)$$

donde $y(x, t)$ denota el vector de variables dependientes, el cual es función de las variables independientes conformadas por un vector de coordenadas espaciales x y el tiempo t , y c denota el vector de parámetros de control, entonces, un estado base del sistema, representado por el vector $y_0(x, t)$ satisface la ecuación:

$$f(y_0; c) = 0 \quad (2)$$

La linearización de (1) entorno al estado base se efectúa introduciendo una expansión en serie de Taylor en torno a y_0 , para lo cual y se escribe como:

$$y = y_0 + y' \quad (3)$$

donde $y'(x, t)$ representa una desviación con respecto al

estado base (o bien una perturbación de éste), la cual debe ser de pequeña magnitud para que la linearización sea válida. La linearización, denotada por la función L permite escribir:

$$L[f(y; c)] = f(y_0; c) + L[f(y'; c)] = 0 \quad (4)$$

con lo cual se llega a:

$$L[f(y'; c)] = 0 \quad (5)$$

ecuación que representa un sistema de ecuaciones diferenciales lineales y homogéneas para el vector y' . Por otro lado, la linearización de las condiciones de borde del sistema de ecuaciones originalmente considerado también conduce a que las condiciones de borde para y' son de naturaleza homogénea. Estos resultados permiten concluir que el problema dado por (5) y las correspondientes condiciones de borde representa un problema de valores propios, cuya solución entrega los modos naturales de oscilación del sistema físico considerado.

La aplicación de los conceptos anteriores al caso de las ondas sedimentarias permite concluir que éstas corresponderían a modos de oscilación natural del sistema flujo-sedimento, los cuales emergen libremente (dado que el problema para las perturbaciones, y' , es homogéneo) si los valores del vector de parámetros de control c están dentro del rango para el cual el sistema es estructuralmente inestable.

ANÁLISIS DE LA FORMACIÓN DE BARRAS

El análisis de la formación de barras presentado a continuación se basa en los resultados de Blondeaux y Seminara (1985) y Colombini et al. (1987). Se considera el flujo en un canal rectangular de ancho $2B^*$, paredes no erosionables y lecho móvil cubierto por material no cohesivo. Como ya se ha discutido, la formación de barras ocurre en flujos de baja profundidad relativa al ancho del canal. Debido a esto el flujo se puede modelar en forma bi-dimensional, utilizando las ecuaciones de St. Venant (ecuaciones promediadas en la vertical) en las direcciones del flujo principal y transversal a dicho flujo. Dado que las barras están relacionadas con inestabilidades de tipo transversal al flujo, es esencial incluir esta última componente en el análisis.

Adicionalmente se utiliza la ecuación de continuidad de sedimento en dos dimensiones, considerando la existencia sólo de transporte de fondo, la cual se desacopla de las ecuaciones que gobiernan al flujo usando la aproximación de que el sistema flujo-sedimento se comporta en forma cuasi-permanente. Es decir, se supone que el flujo se adapta casi instantáneamente a las deformaciones del lecho, las

cuales ocurren más lentamente. Esto permite simplificar el problema eliminando los términos impermanentes en las ecuaciones de St. Venant.

Las ecuaciones que gobiernan el problema se pueden escribir en forma adimensional como:

$$v \frac{\partial u}{\partial n} + u \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{1}{F_0^2} \frac{\partial(h + \eta)}{\partial s} - \beta \frac{\tau_s}{h} \quad (6a)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial n} + u \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{1}{F_0^2} \frac{\partial(h + \eta)}{\partial n} - \beta \frac{\tau_n}{h} \quad (6b)$$

$$\frac{\partial(vh)}{\partial n} + \frac{\partial(uh)}{\partial s} = 0 \quad (6c)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + Q_0 \left(\frac{\partial q_n}{\partial n} + \frac{\partial q_s}{\partial s} \right) = 0 \quad (6d)$$

donde (s, n) son las coordenadas adimensionales longitudinal y transversal, respectivamente, t denota el tiempo adimensional, (u, v) son las componentes en las direcciones longitudinal y transversal, respectivamente, de la velocidad adimensional del flujo promediada en la vertical, h es la profundidad adimensional local del flujo, η es la elevación adimensional local del lecho, (τ_s, τ_n) son las componentes en las direcciones longitudinal y transversal, respectivamente, del esfuerzo de corte adimensional en el lecho, (q_s, q_n) son las componentes en las direcciones longitudinal y transversal, respectivamente, de la tasa volumétrica adimensional de arrastre de fondo local por unidad de ancho, y F_0 denota el número de Froude del flujo no perturbado. Asimismo, β es la razón entre la mitad del ancho del canal, B^* , y la profundidad media del flujo no perturbado h_0^* , y Q_0 está dado por:

$$Q_0 = \frac{(Rgd^3)^{1/2}}{(1-e)h_0^*u_0^*} \quad (7)$$

donde R es la densidad relativa sumergida del sedimento, g es la aceleración de gravedad, d y e son el diámetro y la porosidad del sedimento, respectivamente, y u_0^* denota la velocidad media del flujo no perturbado.

En (6), las variables han sido adimensionalizadas en la forma siguiente:

$$(u^*, v^*) = u_0^* (u, v) \quad ; \quad (h^*, \eta^*) = h_0^* (h, \eta) \quad (8a, b)$$

$$(s^*, n^*) = B^* (s, n) \quad ; \quad (\tau_s^*, \tau_n^*) = \rho u_0^{*2} (\tau_s, \tau_n) \quad (8c, d)$$

$$(q_s^*, q_n^*) = (Rgd^3)^{1/2} (q_s, q_n) \quad ; \quad t^* = \frac{B^*}{u_0^*} t \quad (8e, f)$$

donde el superíndice * indica que la variable es dimensional, y ρ denota la densidad del fluido.

Para cerrar el sistema de ecuaciones (6), es necesario introducir una ley de resistencia y una relación de arrastre de fondo para las componentes de éste en las direcciones longitudinal y transversal. La relación de resistencia usada es la siguiente:

$$(\tau_s, \tau_n) = C(u^2 + v^2)^{1/2} (u, v) \quad (9)$$

donde C representa un coeficiente de fricción el cual puede ser estimado de acuerdo a la relación de Engelund y Hansen (1967). Las componentes del arrastre de fondo se determinan de la ecuación:

$$(q_s, q_n) = (\cos \delta, \sin \delta) \Phi \quad (10)$$

donde δ es el valor local del ángulo que tiene la dirección de movimiento del sedimento con respecto a la dirección longitudinal, el cual se estima a partir de la relación de Parker (1984), y Φ denota la tasa de arrastre total adimensional, la que se estima de la relación de Meyer-Petery Muller (1948).

Es fácil ver que una solución de (6), correspondiente al estado base del sistema el que consiste en un lecho plano donde todo el flujo es en la dirección longitudinal y la altura de escurrimiento es constante, está dada por:

$$(u, v, h, \eta)|_0 = (1, 0, 1, \eta_0) \quad (11)$$

donde η_0 es la elevación del lecho plano.

Con el objeto de estudiar bajo qué condiciones se generan barras en el lecho del sistema considerado, es necesario estudiar la estabilidad del sistema de ecuaciones (6) introduciendo perturbaciones con respecto del estado base dado por (11). Una nueva solución del sistema puede escribirse como:

$$(u, v, h, \eta) = (1, 0, 1, \eta_0) + (u', v', h', \eta') \quad (12)$$

donde las variables con prima denotan las perturbaciones del estado base. Reemplazando (12) en (6) y linearizando el sistema de ecuaciones resultante se obtiene un problema de valores propios para las perturbaciones cuya solución permite obtener los modos normales de oscilación del sistema flujo-sedimento.

Los modos normales resultantes corresponden a una ondulación del fondo con una variación sinusoidal de la elevación del lecho en la dirección longitudinal y transversal. El modo 1 corresponde a ondulaciones del tipo barras alternadas, en que la oscilación transversal tiene una longitud de onda equivalente al doble del ancho del canal, de modo que sólo existe media onda sinusoidal que se alterna asimétricamente en la dirección longitudinal. Este modo se ilustra en la Figura 2. El modo 2 corresponde a ondulaciones del tipo barras dobles, en que la oscilación transversal tiene una longitud de onda igual al ancho del canal, de modo que existe una onda sinusoidal completa que se alterna asimétricamente en la dirección longitudinal. Este modo se ilustra en la Figura 3. Similarmente, el modo 3 corresponde a barras triples, y así sucesivamente.

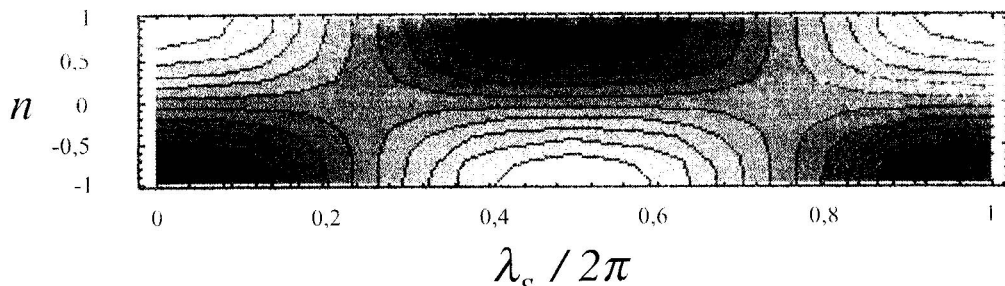


Figura. 2 Perturbación correspondiente al modo 1, asociada a la formación de barras alternadas. La escala de grises indica la elevación del lecho, donde el negro denota socavación máxima y el blanco deposición máxima. La longitud de canal representada equivale a una longitud de onda de la perturbación.

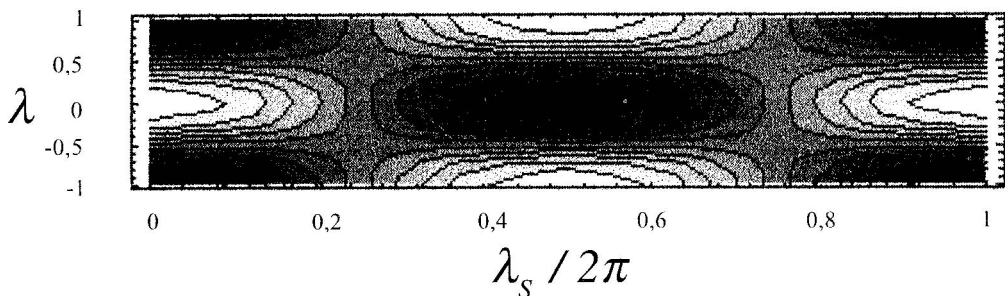


Figura. 3 Perturbación correspondiente al modo 2, asociada a la formación de barras dobles. La escala de grises indica la elevación del lecho, donde el negro denota socavación máxima y el blanco deposición máxima. La longitud de canal representada equivale a una longitud de onda de la perturbación.

Matemáticamente estas posibles soluciones para las perturbaciones pueden escribirse en la forma que se indica a continuación. Para la perturbación correspondiente a la elevación del lecho se tiene por ejemplo:

$$\eta'(s, n, t) = \eta_1 \exp(\Omega t) \cos\left(\frac{\pi}{2} m n\right) \exp(i(\lambda s - \varpi t)) + \text{c.c.} \quad (m \text{ par}) \quad (13a)$$

$$\eta'(s, n, t) = \eta_1 \exp(\Omega t) \sin\left(\frac{\pi}{2} m n\right) \exp(i(\lambda s - \varpi t)) + \text{c.c.} \quad (m \text{ impar}) \quad (13b)$$

donde η_1 denota una constante de pequeña magnitud, $m = 1, 2, 3, \dots$, indica el modo correspondiente a la solución, Ω denota la tasa de evolución temporal de la amplitud de la perturbación, λ denota el número de onda en el sentido longitudinal, ϖ denota la velocidad de migración de la perturbación, $i = \sqrt{-1}$, y c.c. significa complejo conjugado. Para el resto de las variables la expresión resultante para la perturbación correspondiente es similar a la dada por (13).

De la solución del problema de valores propios también se obtiene una relación de dispersión, la cual permite expresar los valores de Ω y ϖ en función de los parámetros de control del sistema y del número de onda λ . Esta relación de dispersión permite determinar los valores de los parámetros de control para que barras de una determinada longitud de onda se vuelvan inestables, es decir, aquellos para los cuales $\Omega > 0$. Del mismo modo, el signo de ϖ permite determinar la dirección de migración de las barras, siendo ésta hacia aguas abajo cuando $\varpi > 0$.

Las curvas que relacionan los parámetros de control con el número de onda, para las cuales $\Omega = 0$ y $\varpi = 0$ se denominan curvas neutrales. En el presente caso, los parámetros de control del sistema corresponden al parámetro β , la aspereza relativa del lecho, d/h_0^* , y el esfuerzo de corte adimensional, $\theta = \tau_0 / (\rho g R d)$, donde τ_0 denota el esfuerzo de corte sobre el fondo en el estado base. Como ejemplo de los resultados obtenidos, la Figura 4 muestra las curvas neutrales en el espacio (λ, β) para el modo 1 ($m=1$) y los valores $(d/h^* = 0.01; \theta = 0.1)$. En esta figura se observa un mínimo de la curva neutral para $\omega, (\lambda_c, \beta_c)$, el cual corresponde a las condiciones de formación incipiente

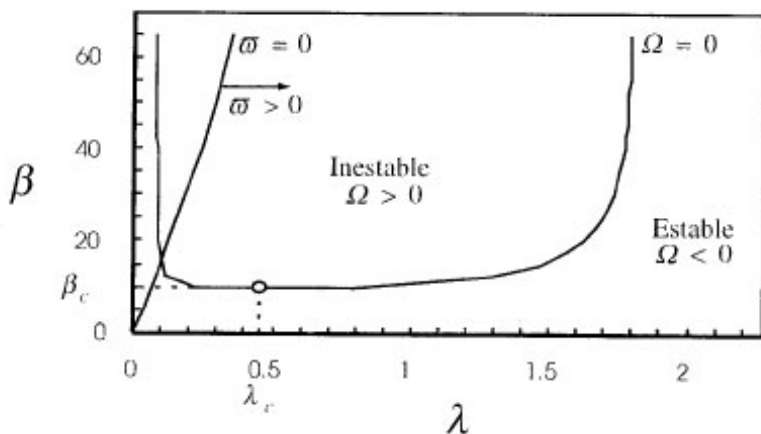


Figura 4 Diagrama de estabilidad del modo 1 asociado a la formación de barras alternadas. El diagrama muestra las curvas neutrales para las condiciones $(d/h^* = 0.01; \theta = 0.1)$. El punto (λ_c, β_c) corresponde a las condiciones de formación incipiente de barras alternadas.

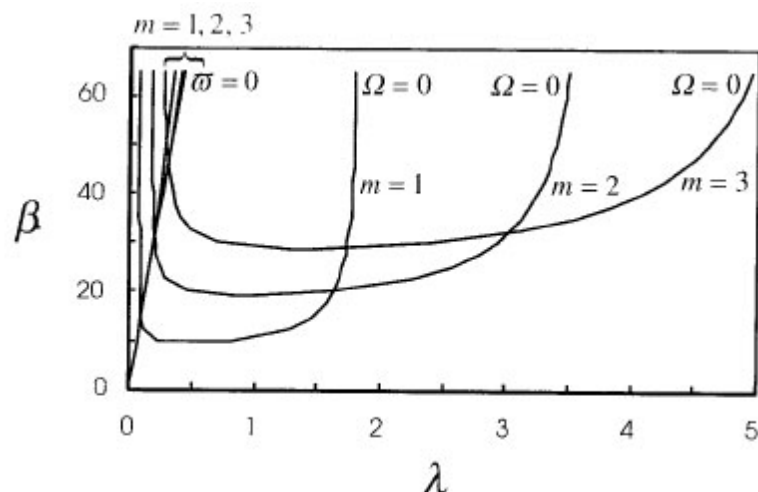


Figura 5 Diagrama de estabilidad de los modos 1, 2 y 3, asociados a la formación de barras alternadas y múltiples. El diagrama muestra las curvas neutrales para las condiciones $(d/h^* = 0.01; \theta = 0.1)$, las mismas que para el caso ilustrado en la Figura 4.

de barras alternadas. Para valores de β mayores que β_c la tasa de crecimiento es positiva indicando que el lecho es inestable para cualquier perturbación con un valor de λ dentro de la curva neutral. Este resultado permite concluir que el número de onda típico de las barras alternadas corresponde al valor λ_c , puesto que éstas son las perturbaciones que primero se desarrollan en el lecho y más rápido crecen. Asimismo, del análisis se obtiene que el valor de σ para barras alternadas es siempre positivo, de donde se concluye que estas formas de fondo siempre se desplazan hacia aguas abajo.

Con el objeto de ilustrar como cambian las curvas neutrales para los distintos modos de oscilación, es decir para los distintos tipos de barras, la Figura 5 muestra, como ejemplo, los resultados obtenidos para los modos 1, 2, y 3, para los mismos valores de los parámetros de control correspondientes a la Figura 4. De esa figura se concluye que los valores de λ_z aumentan con el valor de m , lo cual implica que la longitud de onda de las barras múltiples tiende a ser más pequeña que la de barras alternadas. Asimismo, se concluye que, al igual que las barras alternadas, las barras múltiples tienden a migrar siempre hacia aguas abajo.

ANÁLISIS DE LA FORMACIÓN DE DUNAS Y ANTIDUNAS

El análisis de la formación de dunas y antidunas presentado a continuación tiene como antecedentes los estudios de Engelund (1970) y Fredsøe (1974). Se considera el flujo en un canal con lecho móvil cubierto por material no-cohesivo, con un ángulo de inclinación con respecto a la horizontal igual a α . Como ya se ha discutido, la formación de dunas ocurre en flujos de mayor profundidad relativa que en el caso de barras. Para el análisis de la formación de dunas es esencial modelar la estructura vertical del flujo, debido a que las inestabilidades en este caso ocurren en un plano vertical y no transversalmente como en el caso de las barras. Por otro lado, se supone que el escurrimiento es bidimensional de modo que no es necesario incorporar en el modelo para el flujo la componente transversal de éste.

El flujo se modela utilizando las ecuaciones de Reynolds (es decir, las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas sobre la turbulencia) en la dirección longitudinal y normal al lecho. Adicionalmente, se utiliza la ecuación de continuidad de sedimento en la dirección longitudinal, considerando la existencia sólo de transporte de fondo. Al igual que en el caso del análisis presentado en la sección anterior se supone que el sistema flujo-sedimento se comporta en forma cuasi-permanente, lo cual permite despreocupar los términos impermanentes en las ecuaciones del flujo.

Las ecuaciones que gobiernan el problema se pueden escribir en forma adimensional como:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu_T \nabla^2 u + \frac{\sin \alpha}{F_b^2} \quad (14a)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu_T \nabla^2 w - \frac{\cos \alpha}{F_b^2} \quad (14b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (14c)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + Q_0 \frac{\partial q_s}{\partial x} = 0 \quad (14d)$$

donde (x,z) son las coordenadas adimensionales longitudinal y vertical, respectivamente, t denota el tiempo adimensional, (u,w) son las componentes en las direcciones longitudinal y vertical, respectivamente, de la velocidad adimensional del flujo, p es la presión adimensional, r_i es la elevación adimensional local del lecho, y q_s es la tasa volumétrica adimensional de arrastre de fondo por unidad de ancho en la dirección longitudinal. Asimismo, ν_T denota la viscosidad de remolinos adimensional, Q_0 está dado por:

$$Q_0 = \frac{(R g d^3)^{1/2}}{(1-e) h_0^* u_b^*} \quad (15)$$

donde, R , g , d y e ya fueron definidos en la sección anterior, u_b denota la velocidad de resbalamiento, h_0^* representa la profundidad media del flujo no perturbado, y el número de Fraude F_b se define como:

$$F_b = \frac{u_b^*}{(g h_0^*)^{1/2}} \quad (16)$$

El concepto de velocidad de resbalamiento fue introducido por Engelund (1964) con el objeto de obtener una solución simplificada para la distribución de velocidades del flujo en la vertical. La velocidad de resbalamiento es la velocidad del flujo en las proximidades del fondo, y se obtiene de la ley de resistencia (Engelund, 1970). Esta simplificación se obtiene de considerar un valor constante para la viscosidad de remolinos. De acuerdo a Hinze (1959), V_T se puede expresar como:

$$V_T = 0.077 \frac{\overline{u^* h^*}}{u_b^* h_0^*} \quad (17)$$

donde u^* denota la velocidad de corte media, y h^* representa la altura media del flujo.

El valor de q_s se determinó a partir de la ecuación de Meyer-Peter y Muller, la que fue convenientemente modificada para tomar en cuenta el efecto estabilizador de la gravedad. Ello debido a que el esfuerzo de corte de arrastre incipiente, parámetro que interviene en el cálculo del transporte de fondo, depende de la pendiente del lecho, la cual se ve modificada por la formación de ondas sedimentarias del tipo dunas y antidunas.

En (14), las variables han sido adimensionalizadas en la forma siguiente:

$$(u^*, w^*) = u_b^* (u, w) \quad ; \quad (h^*, \eta^*) = h_0^* (h, \eta) \quad (18a, b)$$

$$(x^*, z^*) = h_0^* (x, z) \quad ; \quad p^* = \rho u_b^* p \quad (18c, d)$$

$$q_s^* = (R, g, d^3)^{1/2} q \quad ; \quad t^* = \frac{h_0^*}{u_b^*} t \quad (18e, f)$$

donde el superíndice * indica que la variable es dimensional, y ρ denota la densidad del fluido.

Una posible solución de (14), correspondiente al estado base del sistema el que consiste en un lecho plano con una altura de escurrimiento constante y velocidad del flujo sólo en la dirección longitudinal, está dada por:

$$(u, w, p, \eta) = (u_0, 0, p_0, \eta_0) \quad (19)$$

donde η_0 es la elevación del lecho plano, u_0 es la distribución de velocidades adimensional del flujo uniforme no perturbado dada por:

$$u_0 = 1 + \frac{u_{*0}}{0.077 u_b^*} z \left(1 - \frac{1}{2} z\right) \quad (20)$$

donde η_{*0} es la velocidad de corte del flujo no perturbado, y p_0 es la distribución de presiones adimensional del flujo uniforme no perturbado, dada por:

$$p_0 = \frac{1}{F_0^2} (1 - z) \quad (21)$$

Con el objeto de estudiar bajo qué condiciones se generan dunas y antidunas en el lecho del sistema considerado, es necesario estudiar la estabilidad del sistema de ecuaciones (14) introduciendo perturbaciones con respecto del estado base dado por (19). Una nueva solución del sistema puede escribirse como:

$$(u, w, p, \eta) = (u_0, 0, p_0, \eta_0) + (u', w', p', \eta') \quad (22)$$

donde las variables con prima denotan las perturbaciones del estado base. Al igual que lo realizado en la sección previa, reemplazando (22) en (14) y linearizando el sistema de ecuaciones resultante se obtiene un problema de valores propios para las perturbaciones cuya solución permite obtener los modos normales de oscilación del sistema flujo-sedimento.

Los modos normales resultantes corresponden básicamente a una ondulación del fondo con una oscilación sinusoidal de la elevación del lecho en el sentido longitudinal. La solución obtenida para las perturbaciones se puede escribir en la forma siguiente. Para la perturbación correspondiente a la velocidad longitudinal se tiene por ejemplo:

$$\begin{aligned} u'(x, z, t) &= \\ &= u_1 f(z) \exp(\Omega t) \exp(i(\lambda x - \omega t)) \\ &+ c.c. \end{aligned} \quad (23)$$

donde u_1 denota una constante de pequeña magnitud, $f(z)$ es la función propia que da la estructura vertical de la perturbación de la velocidad longitudinal, y el resto de los términos conservan el mismo significado que en la ecuación (13) de la sección previa. La perturbación correspondiente a la elevación del lecho se puede escribir análogamente como:

$$\begin{aligned} \eta'(x, t) &= \\ &= \eta_1 \exp(\Omega t) \exp(i(\lambda x - \omega t)) + \\ &+ c.c. \end{aligned} \quad (24)$$

donde η_1 denota una constante de pequeña magnitud. Para el resto de las variables la expresión resultante para la perturbación correspondiente es similar a las dadas por (23) y (24).

Tal como se ha señalado previamente, la relación de dispersión obtenida de la solución del problema de valores propios permite expresar los valores de Ω y ω en función de los parámetros de control del sistema y

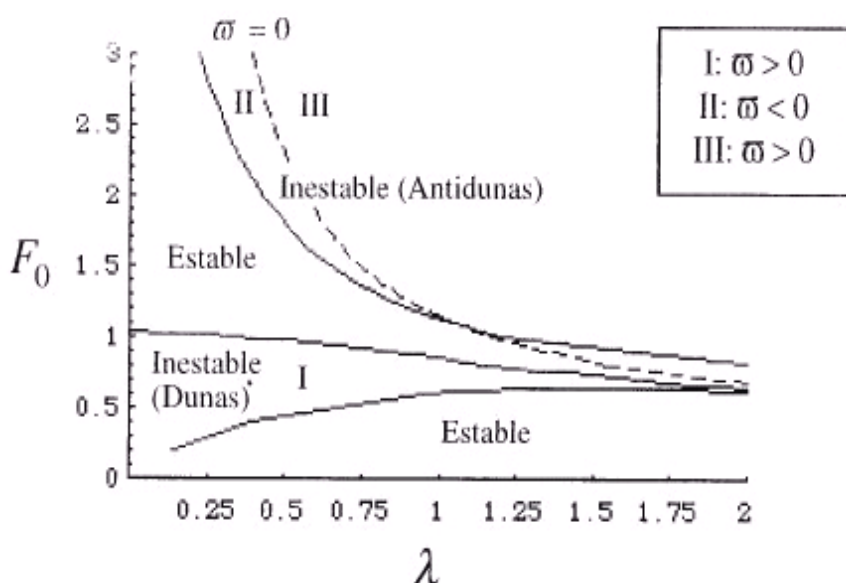


Figura 6 Diagrama de estabilidad asociado a la formación de dunas y antidunas. El diagrama muestra las curvas neutras para la condición $d/h_0^* = 0,01$

del número de onda λ . En el presente caso, los parámetros de control del sistema corresponden a la aspereza relativa del lecho, d/h_0^* , y al número de Froude del flujo medio, F_0 , el cual puede relacionarse con F_b definido en (16) a través de la relación:

$$F_0 = \overline{u_0} F_b \quad (25)$$

donde $\overline{u_0}$ es la velocidad adimensional media del flujo en la vertical, la cual se obtiene de integrar (20) para valores de z entre 0 y 1.

Como ejemplo de los resultados obtenidos del análisis, la Figura 6 muestra las curvas neutrales, $\Omega = 0$ y $\varpi = 0$, en el espacio $(\lambda, , F_0)$ correspondientes al valor $d/h_0^* = 0.01$. De dicha figura se puede concluir que para valores de F_0 suficientemente bajos, el lecho es estable y no se desarrollan ondas sedimentarias en el sistema. A mayores valores de F_0 , aunque todavía interiores a 1, el sistema se vuelve inestable ($\Omega > 0$) y en el lecho se desarrollan ondulaciones que corresponden a ondas sedimentarias del tipo dunas, ya que el análisis indica que ellas se encuentran desfasadas con respecto a la perturbación del flujo, las que siempre migran hacia aguas abajo ($\varpi > 0$). Para valores de F_0 en la vecindad de 1, el análisis predice que el sistema se vuelve estable ($\Omega < 0$), lo cual está asociado a un lecho plano. Sin embargo, para la condición $F_0 = 1$ la solución obtenida presenta una singularidad, asociada a la condición de escurrimiento crítico, en la cual el presente análisis deja de ser válido. Para valores de F_0 superiores a 1, el análisis da como resultado que el lecho se vuelve nuevamente inestable ($\Omega > 0$), dando origen a la formación de antidunas, las cuales se presentan en fase con respecto de la perturbación del flujo. En este caso se dan dos situaciones. En la primera, para valores altos de F_0 , las antidunas se desplazan hacia aguas abajo ($\varpi > 0$); en tanto que en la segunda, para valores intermedios de F_0 aún cuando siempre superiores a 1, las antidunas se desplazan hacia aguas arriba ($\varpi < 0$).

DISCUSIÓN

Los resultados obtenidos de los análisis presentados en las secciones anteriores muestran la factibilidad de estudiar el problema de formación de ondas sedimentarias desde un punto de vista teórico-matemático, analizando a nivel lineal la estabilidad del sistema flujo-sedimento. Este tipo de análisis no sólo permite predecir las condiciones para las cuales se generan las formas de fondo y sus características, como longitud de onda y velocidad de migración, sino que además aporta al mejor entendimiento de los procesos físicos involucrados en dicho fenómeno, lo cual se logra tanto de la interpretación de los resultados como a través del proceso de modelación en sí. Aún cuando el presente trabajo no tiene como objetivo el contrastar las

predicciones teóricas con resultados experimentales, es necesario agregar a modo de discusión final, algunos comentarios relevantes a este respecto.

Las predicciones del modelo lineal para las condiciones de formación incipiente de barras alternadas entregan resultados que comparan favorablemente con observaciones experimentales, principalmente en cuanto a los valores límites del parámetro β , sin embargo es necesario señalar que los resultados son bastante sensibles con respecto de las relaciones de cierre (ley de resistencia, ley de transporte de sedimento) utilizadas en el análisis. Por otro lado, los valores de la longitud de onda de dichas barras predichos analíticamente tienden a ser algo más pequeños que los observados experimentalmente (García y Niño, 1993).

Las predicciones del modelo lineal para las condiciones de formación incipiente de dunas y antidunas entregan resultados que comparan cualitativamente bien con observaciones experimentales. Más específicamente, se encontró que es esencial incorporar en el análisis el efecto estabilizador de la gravedad en la ley de transporte de sedimento (tal como se indicó previamente) de modo de lograr una región de formación de dunas en el plano (λ, F_0) (ver Figura 6) similar a aquella delimitada por resultados experimentales. Por otro lado, el presente análisis tiende a sobreestimar la zona en el plano (λ, F_0) , para $F_0 > 1$, correspondiente a lecho estable. Es decir, el presente análisis predice valores de F_0 demasiado altos para la formación de antidunas (Figura 6). Una posible explicación de ello radica en que el modelo de transporte de sedimento aquí utilizado no considera transporte en suspensión, lo cual si bien en régimen subcrítico (para el que se desarrollan dunas) es una buena aproximación, en régimen supercrítico (para el que se forman antidunas) dejaría de serlo.

LISTA DE SÍMBOLOS

- B^* : mitad del ancho del canal en el análisis de la formación de barras
- C : coeficiente de fricción
- c : vector de parámetros de control en la formulación matemática general
- d : diámetro del sedimento
- e : porosidad del sedimento

F_b :	número de Fronde basado en la velocidad de resbalamiento	(u, v) :	componentes en las direcciones longitudinal y transversal, respectivamente, de la velocidad adimensional del flujo promediada en la vertical en el análisis de la formación de barras
F_0	número de Froude del flujo no perturbado basado en la velocidad media del flujo	(u, w) :	componentes en las direcciones longitudinal y vertical, respectivamente, de la velocidad adimensional del flujo en el análisis de la formación de dunas y antidunas
$f(z)$:	función propia de la estructura vertical de la perturbación de la velocidad longitudinal en el análisis de la formación de dunas y antidunas	u_b^* :	velocidad de resbalamiento en el análisis de la formación de dunas y antidunas
g :	aceleración de gravedad	u_0 :	distribución de velocidades adimensional del flujo uniforme no perturbado en el análisis de la formación de dunas y antidunas
h :	profundidad adimensional local del flujo	$\overline{u_0}$:	velocidad adimensional media del flujo en la vertical en el análisis de la formación de dunas y antidunas
h_0^* :	profundidad media del flujo no perturbado	u_0^* :	velocidad media del flujo no perturbado
$\overline{h^*}$:	altura media del flujo en el análisis de la formación de dunas y antidunas	u_1 :	constante de pequeña magnitud en la expresión para la perturbación adimensional de la velocidad longitudinal del flujo
m :	índice del modo correspondiente al tipo de barra analizado	$\overline{u_*}$:	velocidad de corte media en el análisis de la formación de dunas y antidunas
p :	presión adimensional en el análisis de la formación de dunas y antidunas	u_{*0} :	velocidad de corte del flujo no perturbado
p_0 :	distribución de presiones adimensional del flujo uniforme no perturbado	(u', v', h', η') :	vector de perturbaciones con respecto al estado base en el análisis de la formación de barras
Q_0 :	parámetro adimensional en la ecuación de continuidad de sedimento	(u', w', p', η') :	vector de perturbaciones con respecto al estado base en el análisis de la formación de dunas y antidunas
(q_s, q_n) :	componentes en las direcciones longitudinal y transversal, respectivamente, de la tasa volumétrica adimensional de arrastre de fondo local por unidad de ancho	x :	vector de coordenadas espaciales en la formulación matemática general
R :	densidad relativa sumergida del sedimento		
(s, n) :	coordenadas adimensionales longitudinal y transversal, respectivamente, en el análisis de la formación de barras		
t :	tiempo en la formulación matemática general, tiempo adimensional en el análisis de la formación de barras, y dunas y antidunas		

(x, z) : coordenadas adimensionales longitudinal y vertical, respectivamente, en el análisis de la formación de dunas y antidunas
 y : vector de variables dependientes en la formulación matemática general
 y_0 : estado base del sistema en la formulación matemática general
 y' : desviación con respecto al estado base en la formulación matemática general
 α : ángulo de inclinación del lecho
 β : razón entre la mitad del ancho del canal y la profundidad media del flujo no perturbado
 δ : valor local del ángulo entre la dirección de movimiento del sedimento y la dirección longitudinal
 η : elevación adimensional local del lecho
 η_{00} : elevación del lecho plano
 η_1 : constante de pequeña magnitud en la expresión para la perturbación adimensional del lecho
 θ : esfuerzo de corte adimensional sobre el fondo en el estado base
 λ : número de onda en el sentido longitudinal
 (λ_c, β_c) : condiciones de formación incipiente de barras alternadas
 ν_f : viscosidad de remolinos adimensional
 ρ : densidad del fluido
 (τ_c, τ_c) : componentes en las direcciones longitudinal y transversal, respectivamente, del esfuerzo de corte adimensional en el lecho en el análisis de la formación de barras

τ_0 : esfuerzo de corte sobre el fondo en el estado base
 Φ : tasa volumétrica de arrastre de sedimento de fondo adimensional
 Ω : tasa de evolución temporal de la amplitud de la perturbación
 ϖ : velocidad de migración de la perturbación

REFERENCIAS

- Blondeaux, P. y Seminara, G. (1985) *A unified bar-bend theory of river meanders*. J. Fluid Mech. vol 157, pp 449-470.
- Casti, J. L. (1994) Complexification. *Harper-Perennial*.
- Colombina, M., Seminara, G. y Tubino, M. (1987) *Finite-amplitude alternate bars*. J. Fluid Mech., vol 181, pp 213-232.
- Drazin, P.G., y Reid, W.H. (1981) Hydrodynamic stability. Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematica. Cambridge University Press.
- Engelund, F., y Fredsøe, J. (1982) *Sediment ripples and dunes*. Ann. Rev. Fluid Mech., vol 1, pp 13-37
- Engelund, F. (1970) *Instability of erodible beds*. J. Fluid Mech., vol 42, part 2, pp 225-244.
- Engelund, F. y Hansen, E. (1967) A monograph on sediment transport in alluvial streams. Teknisk Forlag, Copenhagen.
- Engelund, F. (1964) *A practical approach to self-preserving turbulent flows*. Acta Polytechnica Scandinavica, pp 6.
- Fredsøe, J. (1974) *On the development of dunes in erodible channels*. J. Fluid Mech., vol 64, part 1, pp 1-16.
- García, M., y Niño, Y. (1993) *Dynamics of sediment bars in straight and meandering channels: experiments on the resonance phenomenon*. J. Hydr. Research, vol 31, No 6, pp 739-761.

- Hinze, I. O. (1959) Turbulence. McGraw-Hill Series in Mechanical Engrg.
- Jackson, E. A. (1991) Perspectives of nonlinear dynamics. Cambridge University Press.
- Jaeggi, M. N. R. (1984) *Formation and effects of alternate bars*. J. Hydr. Engrg., vol 110, No 2, pp 142-156.
- Kuroki, M. y Kishi, T. (1985) *Regime criteria on bars and braids*. Hydraulic Papers, The Res. Lab. of Civil and Env. Engrg., Hokkaido University. Sapporo, Japan.
- Meyer-Peter, E. y Muller, R. (1948) *Formulas for bedload transport*. 2nd IAHR Congress, Stockholm.
- Parker, G. (1984) *Lateral bedload transport on side slopes*. J. Hydr. Engrg., vol 110, pp 197-199.
- Stuart, J. T. (1958) *On the nonlinear mechanics of hydrodynamic stability*. J. Fluid Mech., vol 4, pp 1-21.
- Vanoni, V. A. (1974) *Factors determining bed forms of alluvial streams*. J. Hydr. Div., vol 100, NOHY3, pp 363-377.

RECONOCIMIENTOS

El presente trabajo se desarrolló con financiamiento otorgado por FONDECYT, a través del Proyecto N° 1950592-95, y por el Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Chile.